Kapitola 10

ÚVOD DO NUMERICKÝCH METOD

Poslední kapitola je věnovaná několika vybraným metodám numerické matematiky. Jde o matematickou disciplínu, která problémy analyticky obtížně řešitelné nebo neřešitelné, převádí na algoritmy, používající pouze jednoduché aritmetické operace. Často to znamená nahrazení veličin, jejichž přesnou hodnotu nejsme schopni určit, jejich aproximacemi a hledání přibližného řešení úlohy.
Na rozdíl od klasických metod matematické analýzy nastal v posledních desetiletích velký rozvoj numerických metod v souvislosti s možnostmi využití výpočetní techniky. Pro řešení úloh této kapitoly bude stačit kalkulačka, ale řešení problémů praxe vyžaduje většinou nasazení počítače a vhodného software.

10.1 !*!Přibližné řešení algebraických rovnic

Algebraická rovnice

Definice 10.1.: Algebraickou rovnicí stupně *n* rozumíme rovnici $P_n(x) = 0$.

Poznámka: 1) Řešením (kořenem) algebraické rovnice je každé číslo (reálné nebo komplexní), které je kořenem polynomu $P_n(x)$. Algebraická rovnice $P_n(x) = 0$ tedy má celkem *n* kořenů (viz podkapitola 3.1.). V následujících úlohách (pokud nebude uvedeno jinak) se však budeme zabývat pouze hledáním reálných kořenů.
2) Vzhledem k tomu, že komplexní kořeny se vždy vyskytují ve dvojici (komplexně sdružené kořeny), má každá algebraická rovnice lichého stupně alespoň jeden reálný kořen.

Algebraické rovnice umíme řešit pro $n = 1,\ 2$ (lineární a kvadratické rovnice).

Pro $n = 3, 4$ je možné určit kořeny rovnice pomocí tzv. Cardanových vzorců. Jsou však složité a v praxi se příliš nepoužívají.
Pokud jsou kořeny celočíselné, umíme je určit rozkladem na součin kořenových činitelů s využitím Hornerova schématu (viz 3. kapitola).
Kořeny umíme určit také pro binomickou rovnici. Je to algebraická rovnice tvaru $x^n + a_n = 0$.
Pro $n = 2$ se jedná o kvadratickou rovnici.
Pro $n = 3$ rozložíme levou stranu rovnice pomocí vzorce $a^3 \pm b^3$.
Pro $n \geq 4$ platí :

- binomická rovnice lichého stupně má právě jeden reálný kořen $x_1 = \sqrt[n]{-a_n} = -\sqrt[n]{a_n}$,

zbývajících $n-1$ kořenů je komplexních,

- binomická rovnice sudého stupně je buď řešitelná rozkladem na součin, nebo má pouze komplexní kořeny.

Příklad 10.1.

Určete reálné kořeny rovnic: a) $x^5 + 1 = 0$, b) $x^4 - 4 = 0$, c) $x^4 + 6 = 0$.

Řešení: a) Pro reálný kořen binomické rovnice $x^5 + 1 = 0$ platí $x^5 = -1$, tedy $x_1 = \sqrt[5]{-1} = -1$.
Zbývající kořeny x_2, x_3, x_4, x_5 jsou komplexní a pro jejich určení by bylo třeba použít goniometrický tvar komplexního čísla.

b) Binomickou rovnici sudého stupně $x^4 - 4 = 0$ je možné řešit rozkladem na součin činitelů :
$(x^2 - 2)(x^2 + 2) = 0$,
$(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 2) = 0$.
Tedy reálné kořeny jsou $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$, komplexní $x_{3,4} = \pm\sqrt{2}\,i$.

c) Binomická rovnice sudého stupně $x^4 + 6 = 0$ má pouze komplexní kořeny k jejichž nalezení je třeba použít goniometrický tvar komplexního čísla.

V případě neceločíselných reálných kořenů můžeme určovat přibližné řešení algebraických rovnic grafickou nebo numerickou metodou.

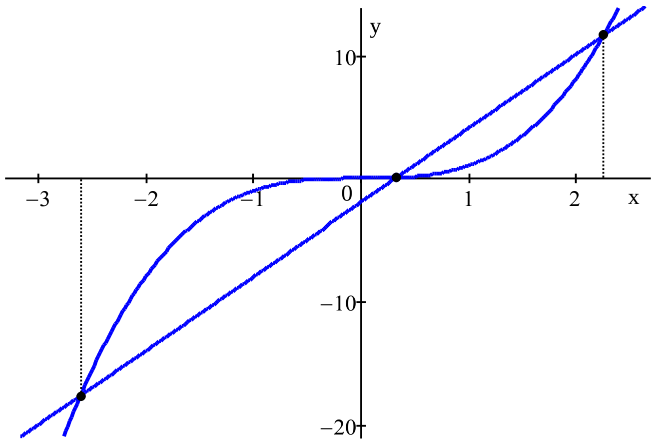
Grafické řešení

Při řešení algebraické rovnice grafickou metodou nejprve danou rovnici $P_n(x) = 0$ upravíme na tvar $f(x) = g(x)$. Polynom $P_n(x)$ přitom rozdělíme na dvě funkce $f(x)$ a $g(x)$ tak, abychom jejich grafy uměli nakreslit. Reálné kořeny rovnice $P_n(x) = 0$ jsou pak rovny x-ovým souřadnicím průsečíků křivek $y = f(x)$ a $y = g(x)$.

Příklad 10.2.

Grafickou metodou určete přibližné řešení rovnice $x^3 - 6x + 2 = 0$.

Řešení: Rovnici $x^3 - 6x + 2 = 0$ upravíme na tvar $x^3 = 6x - 2$ a nakreslíme funkce $f : y = x^3$ a $g : y = 6x - 2$.



Z obrázku odhadneme x-ové souřadnice průsečíků obou křivek : $x_1 \doteq -2{,}7$, $x_2 \doteq 0{,}3$, $x_3 \doteq 2{,}2$.
To jsou současně přibližné hodnoty kořenů dané algebraické rovnice (skutečné hodnoty kořenů s přesností na 4 desetinná místa jsou $x_1 = -2{,}6017; x_2 = 0{,}3399; x_3 = 2{,}2618$).

Poznámka: Graficky můžeme řešit i jiné rovnice než algebraické.

Numerické řešení

Při numerickém řešení algebraických rovnic nejprve pomocí vět o kořenech získáme informace o kořenech rovnice. Pak určíme intervaly co nejmenší délky, ve kterých leží kořeny rovnice a na závěr pomocí některé z aproximačních metod určíme přibližnou hodnotu kořenů rovnice s předepsanou přesností. Postup numerického řešení můžeme rozdělit do následujících tří kroků:

- Určení počtu kladných a záporných kořenů rovnice a určení intervalu, ve kterém leží všechny reálné kořeny.

Algebraickou rovnici $P_n(x) = 0$, jejíž koeficient a_0 je roven jedné, budeme v souladu s označením polynomů nazývat normovanou.

Každou algebraickou rovnici je možné vydělením koeficientem a_0 převést na rovnici normovanou.

V následujících větách jsou shrnuty důležité informace o kořenech algebraických rovnic, které budeme dále využívat při jejich hledání.

Počet reálných kořenů rovnice v daném intervalu

Věta 10.2.: (Bolzanova)

Jestliže $P_n(a) \cdot P_n(b) < 0$, leží v intervalu (a,b) lichý počet kořenů rovnice $P_n(x) = 0$.

Jestliže $P_n(a) \cdot P_n(b) > 0$, leží v intervalu (a,b) sudý počet kořenů rovnice $P_n(x) = 0$ nebo zde neleží žádný kořen rovnice.

Počet sudých a lichých kořenů rovnice

Věta 10.3.: (Descartova)

Rovnice $P_n(x) = 0$ má tolik kladných kořenů, kolik znaménkových změn má posloupnost koeficientů $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ polynomu $P_n(x)$ nebo jich má o sudý počet méně (nulové koeficienty přitom nepočítáme).

Počet záporných kořenů určíme stejným způsobem z polynomu $P_n(-x)$.

Hranice intervalu reálných kořenů rovnice

Věta 10.4.: Pro všechny reálné kořeny x_i normované rovnice $P_n(x) = 0$ platí $|x_i| < 1 + A$, kde $A = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|\}$.

Reálné kořeny tedy leží v intervalu $(-A-1, A+1)$.

Příklad 10.3.

Určete: a) počet kladných a záporných kořenů rovnice $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 1 = 0$, b) interval, ve kterém leží všechny reálné kořeny této rovnice.

Řešení: a) Pro odhad počtu kladných a záporných kořenů pomocí věty 10.3. určíme počet znaménkových změn v posloupnosti koeficientů této rovnice. V posloupnosti $(1, -2, -5, 1)$ jsou dvě znaménkové změny, tedy rovnice má 2 kladné kořeny nebo nemá žádný kladný kořen.

Pro odhad počtu záporných kořenů vytvoříme polynom $P_n(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^3 - 5(-x)^2 + 1$. Tedy $P_n(-x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 1$. Znaménkové změny v posloupnosti $(1, 2, -5, 1)$ jeho koeficientů jsou dvě. Proto má zadaná rovnice 2 záporné kořeny nebo nemá záporný kořen.

Celkem nastane jedna ze čtyř možností:

	1.	2.	3.	4.
počet kladných kořenů	2	0	2	0
počet záporných kořenů	2	2	0	0
počet komplex. kořenů	0	2	2	4

b) Protože jde o normovanou rovnici, určíme číslo A z věty 10.4. jako maximum koeficientů polynomu, tedy čísel $\{|1|,|-2|,|-5|,|1|\}=5$. Všechny reálné kořeny zadané rovnice tedy leží v intervalu $(-5-1,5+1)=(-6,6)$.

- Separace kořenů.

Separací kořenů rovnice rozumíme určení intervalů, ve kterých leží právě jeden kořen dané rovnice. Využíváme přitom Bolzanovu větu, podle které v intervalu (a,b), ve kterém mají hodnoty $P_n(a)$ a $P_n(b)$ různá znaménka, leží alespoň jeden kořen rovnice $P_n(x)=0$.

Postupujeme tak, že interval $(-A-1, A+1)$ rozdělíme na menší intervaly a pomocí Hornerova schématu hledáme ten z podintervalů (x_i, x_j), v jehož krajních bodech platí $P_n(x_i)\cdot P_n(x_j)<0$. Zde musí ležet podle Bolzanovy věty kořen. Podle této věty může v intervalu (x_i, x_j) ležet i více kořenů a naopak kořeny mohou ležet i v intervalech, v jejichž krajních bodech platí $P_n(x_i)\cdot P_n(x_j)>0$. Abychom provedli úplnou separaci, museli bychom provést jemnější dělení jednotlivých intervalů. Pokud však naším cílem bude nalézt alespoň jeden (libovolný) kořen dané rovnice, stačí určit jediný interval (x_i, x_j), pro který platí $P_n(x_i)\cdot P_n(x_j)<0$.

Separaci je možné provádět také graficky nebo s využitím metod diferenciálního počtu. Jestliže například derivace $P_n'(x)$ nemění znaménko v intervalu (x_i, x_j), v jehož krajních bodech platí $P_n(x_i)\cdot P_n(x_j)<0$, je zde funkce $P_n(x)$ stále rostoucí (nebo klesající) a rovnice $P_n(x)=0$ má v tomto intervalu jediný reálný kořen.

Příklad 10.4.
Proveďte separaci kořenů rovnice: a) $x^3-3x^2-x+2=0$, b) $x^3+x-1=0$.
Řešení: a) Jde o normovanou rovnici, kde $A=\max\{|1|,|-3|,|-1|,|2|\}=3$. Reálné kořeny leží tedy v intervalu $(-4,4)$. Tento interval rozdělíme na intervaly délky 1 a pomocí Hornerova schématu vypočteme hodnotu polynomu $P(x) = \; = x^3-3x^2-x+2$ v krajních bodech jednotlivých podintervalů.

	1	−3	−1	2	sgn $P(x_i)$
−4	1	−7	27	−106	−
−3	1	−6	17	−49	−
−2	1	−5	9	−16	−
−1	1	−4	3	−1	−
0	1	−3	−1	2	+
1	1	−2	−3	−1	−
2	1	−1	−3	−4	−
3	1	0	−1	−1	−
4	1	1	3	14	+

Podle Bolzanovy věty má rovnice kořeny v intervalech $(-1,0),(0,1),(3,4)$. Protože jde o algebraickou rovnici, která má právě 3 kořeny, provedli jsme úplnou separaci.

b) Jde o normovanou rovnici, kde $A = \max\{|1|,|1|,|-1|\} = 1$. Reálné kořeny leží tedy v intervalu $(-2,2)$. Pomocí Hornerova schématu hledáme znaménkovou změnu v krajních bodech podintervalů tohoto intervalu.

	1	0	1	−1	sgn$P(x_i)$
−2	1	−2	5	−11	−
−1	1	−1	2	−3	−
0	1	0	1	−1	−
1	1	1	2	1	+
2	1	2	5	9	+

Znaménková změna nastala jen v intervalu $(0,1)$. Zbylé dva reálné kořeny, které algebraická rovnice může mít, je možné hledat dalším dělením intervalů nebo pomocí diferenciálního počtu.

Derivací funkci $y = P(x) = x^3 + x - 1$ dostaneme $y' = 3x^2 + 1$.
Vzhledem k tomu, že první derivace $3x^2 + 1 > 0$, je funkce v intervalu $(-2,2)$ rostoucí, a má proto s osou *x* nejvýše jeden průsečík. Tedy zadaná algebraická rovnice má pouze jeden reálný kořen. Je to ten, který leží v intervalu $(0,1)$.

- Aproximace kořenů.

Pro interval, který jsme získali separací, určíme přibližnou hodnotu kořene s libovolnou přesností některou z aproximačních metod. Nejjednodušší z nich je metoda půlení intervalu.
Metoda vychází z předpokladu, že na základě separace jsme určili interval (a_1,b_1), v jehož krajních bodech platí $P_n(a_1)\cdot P_n(b_1) < 0$, a ve kterém tedy leží kořen rovnice $P_n(x) = 0$. První aproximací tohoto kořene nazveme číslo $x_1 = \dfrac{a_1+b_1}{2}$. Druhou aproximaci x_2 určíme stejným způsobem v tom z intervalů (a_1,x_1), (x_1,b_1), v jehož krajních bodech má polynom $P_n(x)$ různá znaménka. Tento interval označíme (a_2,b_2). Popsaný postup opakujeme dokud chyba aproximace není menší než je předepsaná chyba výpočtu. Přitom chyba aproximace x_k je maximálně rovna číslu $\dfrac{b_k-a_k}{2}$, tedy polovině intervalu (a_k,b_k).
Výpočet zapisujeme do následující tabulky:

k	a_k	b_k	$x_k = \dfrac{a_k+b_k}{2}$	$P_n(x_k)$	chyba $= \dfrac{b_k-a_k}{2}$
1	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

V prvním sloupci je pořadové číslo aproximace, ve druhém a třetím je aktuální interval, ve čtvrtém je přibližná hodnota kořene při *k*-té aproximaci, v pátém sloupci je funkční hodnota $P_n(x_k)$ (na základě jejíhož znaménka budeme vytvářet nový aktuální interval) a v šestém sloupci je maximální chyba, které se dopustíme, když přesnou hodnotu kořene nahradíme *k*-tou aproximací x_k.

Příklad 10.5.
Určete přibližnou hodnotu některého z reálných kořenů algebraické rovnice $x^3 - 6x + 2 = 0$ s přesností $0{,}08$.

Řešení: Jde o normovanou rovnici, kde $A = \max\{|1|,|-6|,|2|\} = 6$. Reálné kořeny tedy leží v intervalu $(-7,7)$. Pomocí Hornerova schématu hledáme znaménkovou změnu v krajních bodech intervalů, na které interval $(-7,7)$ rozdělíme. Vzhledem k jeho délce volíme délku dílčích intervalů 2 jednotky.

x_i	-7	-5	-3	-1	1	3	5	7
$P(x_i)$	-300	-93	-7	7	-3	11	97	304

Ze znaménkových změn vyplývá, že kořeny leží v intervalech $(-3,-1)$, $(-1,1)$, $(1,3)$. Metodou půlení intervalu budeme zpřesňovat např. kořen, ležící v intervalu $(1,3)$. Symbolem $\pm$ nad číslem označujeme, zda hodnota polynomu $P_n(x)$ je v tomto bodě kladná či záporná.

k	a_k	b_k	$x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$	$P_n(x_k)$	chyba $= \frac{b_k - a_k}{2}$
1	1^-	3^+	2^-	-2	1
2	2^-	3^+	$2{,}5^+$	2,625	0,5
3	2^-	$2{,}5^+$	$2{,}25^-$	$-0{,}109$	0,25
4	$2{,}25^-$	$2{,}5^+$	$2{,}375^+$	1,147	0,125
5	$2{,}25^-$	$2{,}375^+$	2,3125		$0{,}0625 < 0{,}008$

Přibližným řešením rovnice $x^3 - 6x + 2 = 0$ je číslo $x_5 = 2{,}3125$ s chybou menší než $0{,}08$.
Z průběhu výpočtu je zřejmé, že chyba bude ve skutečnosti menší než $0{,}0625$.

Úlohy 10.1.

1. Pomocí Hornerova schématu určete všechny kořeny algebraické rovnice:

a) $P(x) = x^5 - 3x^4 + x^3 - 3x^2 - 2x + 6$,

b) $P(x) = x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12$,

c) $P(x) = x^4 + 3x^3 - 4x$.

2. Odhadněte počet kladných a záporných kořenů algebraické rovnice, interval, ve kterém leží a separujte je:

a) $x^3 - x^2 + x + 2 = 0$,

b) $x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 8x + 4 = 0$,

c) $x^4 - 4x^3 - x^2 + 2x - 5 = 0$,

d) $x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 5 = 0$.

3. Řešte algebraické rovnice v oboru **R** s danou přesností:
(pokud má algebraická rovnice více reálných kořenů, určete alespoň jeden)

a) $x^3 - 2x^2 + 4 = 0$ s přesností $0{,}05$

b) $x^3 + 5x - 2 = 0$ s přesností $0{,}08$

c) $x^5 - 3x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$ s přesností $0{,}05$

d) $x^3 + x^2 - 3x - 1 = 0$ s přesností $0{,}06$

e) $x^3 - x^2 + 3x + 1 = 0$ s přesností $0{,}06$

Výsledky úloh 10.1.

1. a) $\left\{ \pm 1,\ 3,\ \pm i\sqrt{2} \right\}$, b) $\{ 1,\ -1,\ 2, -2, 3 \}$, c) $\{ 0, 1, -2, -2 \}$.

2. a) 1 klad,1 záp; kořeny leží v int. $(-3,3)$; separace: $(-1,0)$, 2 komplexní koř.,

b) 4, 2 nebo 0 klad,1 záp; kořeny leží v int. $(-9,9)$; separace: $(-2,-1)$, $x = 2$ je dvojnásobný koř., 2 komplexní kořen, c) 3 nebo 1 klad,1 záp; kořeny leží v int. $(-6,6)$; separace: $(-2,-1)$, $(4,5)$, $x = 2$ je komplexní kořen,

d) 4, 2 nebo 0 kl,1 záp; kořeny leží v int. $(-10,10)$; separace: $(-1,0)$, $(1,3/2)$, $(3/2,2)$, $(3,4)$.

3. a) $x \doteq -1{,}13039$, b) $x \doteq 0{,}40625$, c) $x_1 \doteq -0{,}841189$; $x_2 \doteq 1{,}118075$; $x_3 \doteq 3{,}35755$;

d) $x_1 \doteq -2{,}170086$; $x_2 \doteq -0{,}311108$; $x_3 \doteq 1{,}48119$, e) $x \doteq -0{,}295598$.

10.2 Aproximace funkce

Při numerickém řešení úloh často nahrazujeme funkci $f(x)$, jejíž přesný tvar neznáme nebo která je příliš složitá, funkcí $\varphi(x)$, která původní funkci $f(x)$ vhodným způsobem „napodobuje“ a přitom se snadno zpracovává. Takovou funkci $\varphi(x)$ budeme nazývat aproximací funkce $f(x)$. Funkcí $\varphi(x)$ nejčastěji bývají polynomy. Budeme se zabývat třemi různými způsoby aproximace.

- **!*!Aproximace Taylorovým polynomem**

Tento způsob aproximace funkce se používá v případě, že hledáme funkci $\varphi(x)$, která co nejpřesněji vyjadřuje danou funkci $f(x)$ v okolí bodu x_0. Známe-li hodnotu prvních *n* derivací funkce $f(x)$ v bodě x_0, vytvoříme polynom, který bude mít tyto derivace v bodě x_0 stejné. Vzniklý polynom budeme nazývat Taylorův polynom.

Taylorův polynom

Definice 10.5.: Nechť funkce $f(x)$ má bodě x_0 derivaci až do řádu *n*. Pak polynom

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

se nazývá Taylorovým polynomem stupně *n* funkce $f(x)$ v bodě x_0.

Taylorův polynom používáme pro přibližný výpočet hodnot funkce $f(x)$ v ryzím okolí bodu x_0. Pro $x_0 = 0$ se nazývá Taylorův polynom také Maclaurinovým polynomem.

Taylorova věta

Věta 10.6.: Nechť funkce $f(x)$ má v okolí bodu x_0 spojitou derivaci řádu $n+1$. Pak pro každé *x* z tohoto okolí platí :

$$f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x),$$

kde $T_n(x)$ je Taylorův polynom stupně *n* funkce $f(x)$ v bodě x_0 a $R_{n+1}(x)$ je zbytek, pro který platí $R_{n+1}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}.(x - x_0)^{n+1}$, kde $\alpha \in (x_0, x)$.

Zbytek vyjadřuje chybu, které se dopustíme, nahradíme-li funkci $f(x)$ Taylorovým polynomem $T_n(x)$. Z tvaru zbytku je zřejmé, že tato chyba je malá a platí $f(x) \doteq T_n(x)$, jestliže bod x je blízko bodu x_0, stupeň polynomu n je velký, a derivace $f^{(n+1)}(x)$ je v okolí bodu x_0 malá. Pro určení chyby je třeba odhadnout hodnotu derivace řádu $(n+1)$ funkce v okolí bodu x_0. Pokud je zde $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \le M$, pak pro chybu aproximace platí

$$\left|R_{n+1}(x)\right| \le \frac{M}{(n+1)!}.\left|x-x_0\right|^{n+1}.$$

Příklad 10.6.

Napište Taylorův polynom 4. stupně funkce $f: y=\sqrt{x+1}$ v bodě $x_0=3$.

Řešení: Nejprve vypočítáme funkční hodnotu a derivace 1.-4. řádu dané funkce v bodě $x_0=3$.

$$f(x)=\sqrt{x+1}, \qquad f(3)=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2,$$

$$f'(x)=\left((x+1)^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}, \qquad f'(3)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4},$$

$$f''(x)=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(x+1)^{-\frac{3}{2}}=\frac{-1}{4\sqrt{(x+1)^3}}, \qquad f''(3)=\frac{-1}{4\sqrt{4^3}}=\frac{-1}{32},$$

$$f'''(x)=\frac{-1}{4}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot(x+1)^{-\frac{5}{2}}=\frac{3}{8\sqrt{(x+1)^5}}, \qquad f'''(3)=\frac{3}{8\sqrt{4^5}}=\frac{3}{256},$$

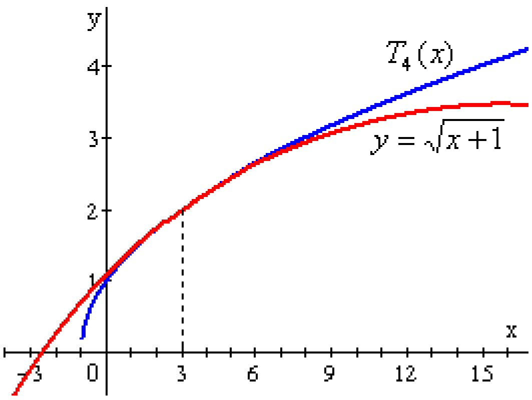
$$f^{(4)}(x)=\frac{3}{8}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot(x+1)^{-\frac{7}{2}}=\frac{-15}{16\sqrt{(x+1)^7}}, \qquad f^{(4)}(3)=\frac{-15}{16\sqrt{4^7}}=\frac{-15}{2048},$$

Vypočtené hodnoty dosadíme do vztahu, vyjadřujícího Taylorův polynom :

$$T_4(x)=2+\frac{\frac{1}{4}}{1!}(x-3)+\frac{\frac{-1}{32}}{2!}(x-3)^2+\frac{\frac{3}{256}}{3!}(x-3)^3+\frac{\frac{-15}{2048}}{4!}(x-3)^4=$$

$$=2+\frac{(x-3)}{4}-\frac{(x-3)^2}{64}+\frac{(x-3)^3}{512}-\frac{5(x-3)^4}{16384}.$$

Z obrázku, na kterém je znázorněna funkce $y=\sqrt{x+1}$ a její aproximace Taylorovým polynomem, je vidět podobnost funkcí v okolí bodu $x_0=3$.



Příklad 10.7.

Nahraďte funkci $f: y=\sin x$ v intervalu $(-1,1)$ Taylorovým polynomem 3. stupně a odhadněte chybu.

Řešení: Podle věty 10.6. je $f(x)=T_n(x)+R_{n+1}(x)$. Nejprve určíme Taylorův polynom 3. stupně funkce $f: y=\sin x$ v bodě $x_0=0$.

$f(x)=\sin x$, $\quad f(0)=0$,

$f'(x)=\cos x$, $\quad f'(0)=1$,

$f''(x)=-\sin x$, $\quad f''(0)=0$,

$f'''(x)=-\cos x$, $\quad f'''(0)=-1$,

$$T_3(x)=0+\frac{0}{1!}(x-0)+\frac{0}{2!}(x-0)^2+\frac{-1}{3!}(x-0)^3=x-\frac{x^3}{3!}.$$

Tedy $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+R_4(x)$, kde $R_4(x)=\dfrac{f^{(4)}(\alpha)}{4!}\cdot(x-0)^4=\dfrac{\sin(\alpha)}{4!}\cdot x^4$ pro $\alpha\in(0,x)$.

Vzhledem k tomu, že $|\sin x|\le 1=M$, je $|R_4(x)|\le\dfrac{1}{4!}\cdot\left|x^4\right|$.

Pro $x\in(-1,1)$ bude pro chybu platit $|R_4(x)|\le\dfrac{1}{4!}=\dfrac{1}{24}$.

Z uvedeného příkladu je vidět, že určit Taylorův polynom *n*-tého stupně je často možné i bez počítání derivací vyššího řádu :

$$\sin x\doteq T_n(x)=1-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},\ \text{kde } n=1,2,\ldots\ .$$

Úlohy 10.2.1.

1. Pro danou funkci napište Taylorův polynom 3. stupně v daném bodě:

a) $y=\operatorname{tg}x$, $x_0=0$, b) $y=\dfrac{1}{1-x}$, $x_0=-1$, c) $y=x\sin x$, $x_0=\pi$.

2. Pro danou funkci napište Taylorův polynom 4. stupně v daném bodě:

a) $y=xe^{-x}$, $x_0=0$, b) $y=\ln(x-1)$, $x_0=2$, c) $y=\operatorname{cotg}x$, $x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

3. Napište Taylorův polynom *n*-tého stupně funkce v daném bodě:

a) $f: y=e^{x+1}$ v bodě $x_0=-1$, b) $f: y=\ln(x+1)$ v bodě $x_0=0$,

c) $f: y=\dfrac{1}{x+1}$ v bodě $x_0=0$, d) $f: y=e^{2x}$ v bodě $x_0=0$,

e) $f: y=\operatorname{arctg}x$ v bodě $x_0=0$.

4. Napište Taylorův polynom funkce $f: y=x^3+3x^2-2x+4$ v bodě $x_0=-1$.

5. Nahraďte funkci $f: y=\cos x$ v okolí bodu $x_0=0$ Taylorovým polynomem 3. stupně a odhadněte chybu na intervalu $\langle -0{,}1;\ 0{,}1\rangle$.

6. Určete hodnotu čísla e s chybou menší než 10^{-3}.

7. Určete $\sin 18^\circ$ s chybou menší než 10^{-5}. Použijte přitom MacLaurinův polynom a počítejte pro hodnotu $x=\dfrac{18\pi}{180}=0{,}314159$.

8. Odhadněte chybu vzorců, založených na použití Taylorových polynomů :

a) $\operatorname{tg} x = x + \dfrac{x^3}{3}$ pro $x \in \langle -0{,}1;0{,}1\rangle$, b) $\sqrt{x+1} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8}$ pro $x \in \langle 0{,}1\rangle$.

Výsledky úloh 10.2.1.

1. a) $T_3(x) = x + \dfrac{1}{3}x^3$, b) $T_3 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}(x+1) + \dfrac{1}{8}(x+1)^2 + \dfrac{1}{16}(x+1)^3$,

c) $T_3(x) = -\pi(x-\pi) + (x-\pi)^2 + \dfrac{\pi}{3}(x-\pi)^3$.

2. a) $T_4(x) = x - x^2 + \dfrac{1}{2}x^3 - \dfrac{1}{6}x^4$, b) $T_4 = (x-2) - \dfrac{1}{2}(x-2)^2 + \dfrac{1}{3}(x-2)^3 - \dfrac{1}{4}(x-2)^4$,

c) $T_4 = 1 - 2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^2 - \dfrac{8}{3}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^3 + \dfrac{10}{3}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^4$.

3. a) $T_n(x) = 1 + \dfrac{1}{1!}\cdot(x+1) + \dfrac{1}{2!}\cdot(x+1)^2 + \ldots + \dfrac{1}{n!}\cdot(x+1)^n$,

b) $T_n(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\cdot\dfrac{x^n}{n}$, c) $T_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n$,

d) $T_n(x) = 1 + 2x + \dfrac{4}{2!}x^2 + \dfrac{8}{3!}x^3 + \ldots + \dfrac{2^n}{n!}x^n$, e) $T_n(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^{n+1}\cdot\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

4. $T_3(x) = (x+1)^3 - 5(x+1) + 8$, 5. $\cos x \doteq 1 - \dfrac{x^2}{2}$, $|R_4(x)| \le \dfrac{1}{240000}$.

6. Stačí volit $n = 6$: $\mathrm{e} \doteq 1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{4!} + \dfrac{1}{5!} + \dfrac{1}{6!} = 2{,}71828$.

7. Stačí volit $n = 6$: $\sin 18^\circ \doteq \dfrac{18\pi}{180} - \dfrac{\left(\dfrac{18\pi}{180}\right)^3}{3!} + \dfrac{\left(\dfrac{18\pi}{180}\right)^5}{5!} = 0{,}309017$.

8. a) 2.10^{-6}, b) $\dfrac{1}{16}$.

- **Aproximace Lagrangeovým interpolačním polynomem**

Tento způsob aproximace se používá v případě, že funkce $f(x)$ je daná hodnotami v $n+1$ bodech. Nejčastěji to bývá tabulka hodnot, vzniklá jako výsledek měření nebo výpočtů :

x_i	x_0	x_1	...	x_n
$f(x_i)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	...	$f(x_n)$

.

Čísla x_k nazýváme uzlové body. Aproximaci funkce mezi uzlovými body nazýváme interpolací (na rozdíl od aproximace funkce vně uzlových bodů, kterou nazýváme extrapolací). Cílem úlohy je najít funkci $\varphi(x)$, která body tabulky prochází. Existuje jediný polynom, splňující tento požadavek. Jednou z možností, jak tento polynom určit, je aproximace funkce $f(x)$ Lagrangeovým interpolačním polynomem.

Lagrangeův interpolační vzorec

Věta 10.7.: Nechť je dáno $n+1$ dvojic $[x_i, f(x_i)]$, kde $i = 0,1,2,\ldots,n$.

Potom pro polynom $L_n(x) = f(x_0).l_0(x) + f(x_1).l_1(x) + ... + f(x_n).l_n(x)$, kde funkce $l_k(x) = \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}$, platí $L_k(x_k) = f(x_k)$ pro všechna $i = 0,1,2,...,n.$

Polynom $L_n(x)$ nazýváme Lagrangeův interpolační polynom.

Při výpočtu funkce $l_k(x)$ je tedy v čitateli vynechán výraz $(x - x_k)$ a ve jmenovateli výraz $(x_k - x_k)$.

Z věty 10.7. vyplývá, že pomocí $n+1$ bodů je možné vytvořit Lagrangeův polynom stupně nejvýše *n*.

Poznámka: Podobně jako u aproximace funkce $f(x)$ Taylorovým polynomem platí $f(x) = L_n(x) + R_n(x)$, kde $R_n(x)$ je chyba interpolace. Známe-li rovnici funkce $f(x)$, platí pro odhad chyby $R_n(x)$ na intervalu, který obsahuje body $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$, vztah:

$$|R_n(x)| \leq \frac{|(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)|}{(n+1)!}.M_{n+1} ,$$

kde M_{n+1} je maximální hodnota absolutní hodnoty derivace (*n*+1) řádu funkce $f(x)$ na tomto intervalu.

Příklad 10.8.

Určete Lagrangeův polynom funkce procházející body z následující tabulky

x_i	-1	0	2	3
$f(x_i)$	1	-2	0	2

.

Odhadněte hodnotu této funkce v bodě $x = 1$.

Řešení: Lagrangeův polynom jdoucí zadanými body má tvar

$$L_3(x) = f(x_0)\cdot l_0(x) + f(x_1)\cdot l_1(x) + f(x_2)\cdot l_2(x) + f(x_3)\cdot l_3(x).$$

Hodnoty $f(x_i)$ známe, je potřeba vypočítat koeficienty $l_i(x)$.

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} = \frac{(x - 0)(x - 2)(x - 3)}{(-1 - 0)(-1 - 2)(-1 - 3)} = \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{-12},$$

$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = \frac{(x + 1)(x - 2)(x - 3)}{(0 + 1)(0 - 2)(0 - 3)} = \frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{6},$$

$l_2(x)$ není potřeba počítat, protože $f(x_2) = 0$,

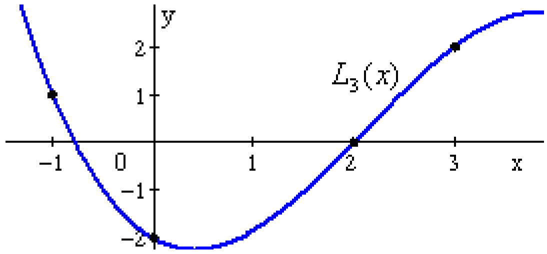
$$l_3(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \frac{(x + 1)(x - 0)(x - 2)}{(3 + 1)(3 - 0)(3 - 2)} = \frac{x^3 - x^2 - 2x}{12},$$

$$L_3(x) = 1\cdot\frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{-12} - 2\cdot\frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{6} + 0 + 2\cdot\frac{x^3 - x^2 - 2x}{12} =$$

$$= \frac{-x^3 + 5x^2 - 6x - 4x^3 + 16x^2 - 4x - 24 + 2x^3 - 2x^2 - 4x}{12} = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{19}{12}x^2 - \frac{7}{6}x - 2.$$

Přibližná hodnota funkce zadané tabulkou, v bodě $x = 1$ je

$$f(1) \doteq L_3(1) = -\frac{1}{4}\cdot 1^3 + \frac{19}{12}\cdot 1^2 - \frac{7}{6}\cdot 1 - 2 = -\frac{11}{6}.$$



Příklad 10.9.

Určete Lagrangeův polynom pro funkci $f: y = \sin(\pi x)$, jestliže za uzlové body volíme čísla $x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{6},\ x_2 = \frac{1}{2}$. Vypočítejte přibližnou hodnotu funkce f v bodě $x = \frac{1}{4}$ a odhadněte chybu, které se při tom dopustíte.

Řešení: Vytvoříme tabulku hodnot

x_i	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
$f(x_i)$	0	$\frac{1}{2}$	1

.

Lagrangeův polynom jdoucí zadanými body má tvar

$$L_2(x) = f(x_0)\cdot l_0(x) + f(x_1)\cdot l_1(x) + f(x_2)\cdot l_2(x).$$

Funkci $l_0(x)$ není potřeba počítat, protože $f(x_0) = 0$.

$$l_1(x) = \frac{(x-0)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{6}-1\right)\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)} = -18x^2 - 9x,\quad l_2(x) = \frac{(x-0)\left(x-\frac{1}{6}\right)}{\left(\frac{1}{2}-0\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)} = 6x^2 - x.$$

Tedy celkem $L_2(x) = 0 + \frac{1}{2}\cdot(-18x^2 + 9x) + 1\cdot(6x^2 - x) = -3x^2 + \frac{7}{2}x$.

Přibližná hodnota funkce $y = \sin(\pi x)$ v bodě $x = \frac{1}{4}$ je $f(\frac{1}{4}) \doteq L_2(\frac{1}{4}) = 0{,}6875$.

$\sin(\pi x) = L_2(x) + R_2(x)$, kde $|R_2(x)| \le \frac{|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|}{3!}\cdot M_3$.

Hodnotu M_3 určíme pomocí 3. derivace $y''' = (\sin(\pi x))''' = -\pi^3\cdot\cos(\pi x)$.

Pro tuto derivaci na intervalu $\left\langle 0, \frac{1}{2}\right\rangle$ platí $\left|-\pi^3\cdot\cos(\pi x)\right| \le \pi^3 = M_3$.

$$\text{Chyba } \left|R_2\left(\frac{1}{4}\right)\right| \le \frac{\left|\left(\frac{1}{4}-0\right)\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\right|}{3!}\cdot\pi^3 = \frac{\pi^3}{1152} = 0{,}0269.$$

Skutečná chyba aproximace je $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - 0{,}6875 = 0{,}7071 - 0{,}6875 = 0{,}0196$.

Úlohy 10.2.2.

1. Napište Lagrangeův interpolační polynom pro funkci danou tabulkou :

a)

x_i	-1	1	3
$f(x_i)$	2	0	4

, b)

x_i	2	4	6
$f(x_i)$	1	3	-2

, c)

x_i	1	3	4	5
$f(x_i)$	-1	0	2	1

, d)

x_i	-2	0	2	4
$f(x_i)$	-3	-1	0	1

.

2. Napište Lagrangeův interpolační polynom pro funkci $f : y = \cos\frac{\pi}{3}x$, jestliže volíte uzlové body $x_0 = -\frac{3}{2}, x_1 = 0, x_2 = 1$. Určete přibližnou hodnotu funkce $f(x)$ v bodě $x = -\frac{1}{2}$ a odhadněte chybu této aproximace.

3. Napište Lagrangeův interpolační polynom pro funkci $f : y = \ln x$, jestliže volíte uzlové body $x_0 = 2,\ x_1 = 3,\ x_2 = 4$. Určete přibližnou hodnotu funkce $f(x)$ v bodě $x = 2{,}5$ a odhadněte její chybu.

4. S jakou chybou lze určit hodnotu $\sqrt{115}$ pomocí Lagrangeova interpolačního polynomu funkce $f : y = \sqrt{x}$, zvolíme-li za uzlové body čísla $x_0 = 100,\quad x_1 = 121,\ x_2 = 144$?

Výsledky úloh 10.2.2.

1. a) $L_2(x) = \frac{3}{4}x^2 - x + \frac{1}{4}$, b) $L_2(x) = -\frac{7}{8}x^2 + \frac{25}{4}x - 8$,

c) $L_3(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 11x + 6$, d) $L_3(x) = \frac{1}{48}x^3 - \frac{1}{8}x^2 - \frac{2}{3}x - 1$.

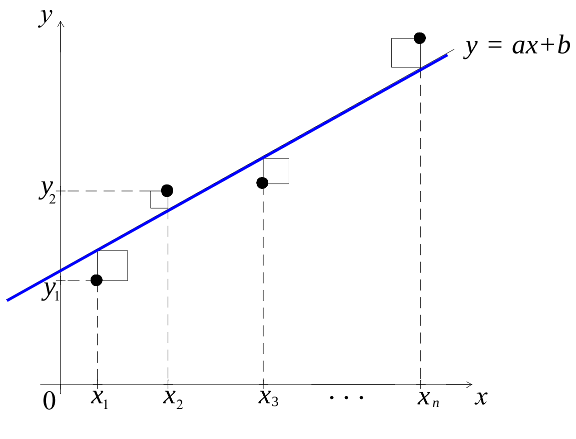
2. $L_2(x) = -\frac{1}{6}\cdot(2x^2 + x - 6)$, $L_2(-\frac{1}{2}) = 1$, $\left|R_2(-\frac{1}{2})\right| \le 0{,}07$.

3. $L_2(x) = -0{,}05892x^2 + 0{,}7x - 0{,}4713$, $L_2(2{,}5) = 0{,}91045$, $|R_2(2{,}5)| \le 0{,}0156$.

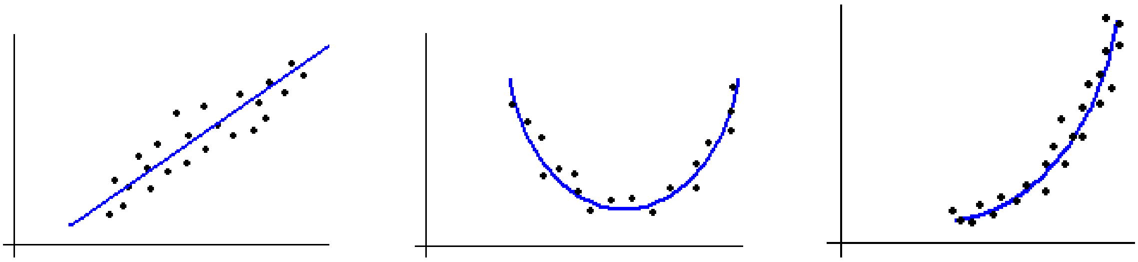
4. $|R_2(x)| \le 1{,}6.10^{-3}$.

- **Metoda nejmenších čtverců**

Tuto metodu používáme pro aproximaci funkce dané tabulkou, jsou-li hodnoty $y_i = f(x_i)$ zatíženy chybami (například při měření) nebo je-li jich velký počet. V těchto případech nepožadujeme, aby aproximační funkce $\varphi(x)$ body souboru procházela, ale prokládáme je polynomem nebo jinou funkcí tak, aby součet čtverců odchylek aproximační funkce $\varphi(x)$ od hodnot z tabulky $y_i = f(x_i)$ (tj. součet $\sum_{k=1}^{n}(\varphi(x_k) - y_k)^2$) byl co nejmenší.



K aproximaci používáme přímku, parabolu, exponenciální funkci atd. podle toho, na jakou závislost mezi body souboru usuzujeme:



a) V případě lineární závislosti aproximujeme soubor bodů $[x_i, y_i]$ přímkou $y = ax + b$, kde koeficienty *a* a *b* určíme řešením soustavy:

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Při výpočtu potřebných součtů přitom používáme následující tabulku:

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\sum_{i=1}^{n} x_i$	$\sum_{i=1}^{n} y_i$	$\sum_{i=1}^{n} x_i^2$	$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

b) !*!Při aproximaci souboru bodů parabolou $y = ax^2 + bx + c$ určíme koeficienty *a*, *b*, *c* řešením soustavy:

$$a\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + b\sum_{k=1}^{n} x_k + c\sum_{k=1}^{n} 1 = \sum_{k=1}^{n} y_k$$

$$a\sum_{k=1}^{n} x_k^3 + b\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + c\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

$$a\sum_{k=1}^{n} x_k^4 + b\sum_{k=1}^{n} x_k^3 + c\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 y_k$$

První řádek výpočetní tabulky má pak tvar:

x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i y$	$x_i^2 y$

c) **!*!**Pokud dochází k rychlejšímu než lineárnímu růstu, lze použít k vyrovnání exponenciální funkci $y = b.a^x$.

Zlogaritmujeme-li tuto rovnici $\ln y = \ln b + x \ln a$

a označíme $Y = \ln y,\ B = \ln b,\ A = \ln a$

dostaneme lineární funkci $Y = B + xA$

Pro výpočet koeficientů *A*, *B* (resp. $\ln b, \ln a$) pak můžeme použít rovnice

$$A\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + B\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i Y_i$$

$$A\sum_{i=1}^{n} x_i + B\sum_{i=1}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

nebo

$$\ln a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \ln b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \ln y_i$$

$$\ln a\sum_{i=1}^{n} x_i + \ln b\sum_{i=1}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n} \ln y_i \, .$$

Na závěr vyjádříme hledané koeficienty $a = e^{\ln a}$, $b = e^{\ln b}$.

První řádek výpočetní tabulky má pak tvar :

x_i	y_i	x_i^2	$\ln y_i$	$x_i \ln y_i$

Pokud jsou hodnoty *y* záporné, přičteme k nim vhodné číslo *k* tak, aby $y + k > 0$. Důvodem je požadavek, aby logaritmovaný výraz byl kladný.

První řádek tabulky má tvar:

x_i	y_i	$y_i + k$	x_i^2	$\ln(y_i + k)$	$x_i.\ln(y_i + k)$

Příklad 10.10.

Metodou nejmenších čtverců vyrovnejte přímkou body : $[-1,5]$, $[1,0]$, $[2,-2]$, $[3,-7]$, $[5,-10]$. Načrtněte obrázek.

Řešení: Hledaná přímka má rovnici $y = ax + b$. Koeficienty *a* a *b* určíme řešením soustavy :

$$\begin{aligned} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} 1 &= \sum_{i=1}^{n} y_i \end{aligned} .$$

Nejprve však pomocí tabulky vypočítáme jednotlivé sumy, přičemž počet zadaných bodů je $n = 5$.

x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2
-1	5	-5	1
1	0	0	1
2	-2	-4	4
3	-7	-21	9
5	-10	-50	25
10 $\sum_{i=1}^{5} x_i$	-14 $\sum_{i=1}^{5} y_i$	-80 $\sum_{i=1}^{5} x_i \cdot y_i$	40 $\sum_{i=1}^{5} x_i^2$

Odpovídající soustava má tvar

$$\begin{aligned} a \cdot 40 + b \cdot 10 &= -80 \\ a \cdot 10 + b \cdot 5 &= -14 \end{aligned}$$

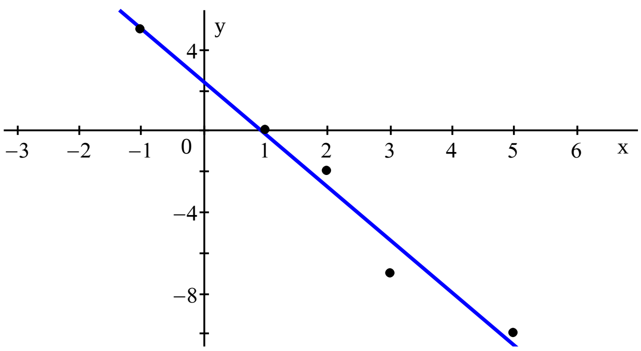
Přičteme-li k první rovnici (-2)-násobek druhé rovnice, dostaneme rovnici

$$20a = -52 .$$

Tedy $a = -2{,}6$ a $b = 2{,}4$.

Přímka, aproximující dané body metodou nejmenších čtverců má tvar $y = -2{,}6x + 2{,}4$.

Na závěr do souřadnicové soustavy nakreslíme zadané body i nalezenou přímku.



Příklad 10.11.

Metodou nejmenších čtverců aproximujte exponenciální funkcí $y = b \cdot a^x$ body

x_i	-1	0	1	2
y_i	$-1{,}6$	1	18	158

.

Řešení: Koeficienty a a b hledané exponenciální funkce určíme řešením soustavy :

$$\begin{aligned} \ln a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \ln b\sum_{i=1}^{n} x_i &= \sum_{i=1}^{n} x_i \ln y_i \\ \ln a\sum_{i=1}^{n} x_i + \ln b\sum_{i=1}^{n} 1 &= \sum_{i=1}^{n} \ln y_i \end{aligned}.$$

Protože hodnota y_1 je záporná, přičteme ke všem hodnotám y_i číslo 2.
Pomocí tabulky vypočítáme jednotlivé sumy, přičemž počet zadaných bodů $n = 4$.

x	y	$y+2$	x^2	$\ln(y+2)$	$x\cdot\ln(y+2)$
-1	$-1{,}6$	$0{,}4$	1	$-0{,}92$	$0{,}92$
0	1	3	0	$1{,}1$	0
1	18	20	1	3	3
2	158	160	4	$5{,}07$	$10{,}14$
2	$-$	$-$	6	$8{,}255$	$14{,}06$

Odpovídající soustava má tvar $\begin{aligned} \ln a\cdot 6 + \ln b\cdot 2 &= 14{,}06 \\ \ln a\cdot 2 + \ln b\cdot 4 &= 8{,}255 \end{aligned}$.

Přičteme-li ke druhé rovnici (-2)-násobek první rovnice, dostaneme rovnici

$$-10.\ln a = -19{,}865.$$

Odtud $\ln a = 1{,}9865 \Rightarrow a = e^{\ln a} = 7{,}29$, $\ln b = e^{\ln b} = 1{,}07 \Rightarrow b = 2{,}917$.

Tedy $y + 2 = 2{,}917\cdot 7{,}29^x$.

Exponenciální funkce, která aproximuje dané body metodou nejmenších čtverců má rovnici $y = 2{,}917\cdot 7{,}29^x - 2$.

Úlohy 10.2.3.

1. Vyrovnejte soubor přímkou metodou nejmenších čtverců a načrtněte graf:

a)

x_i	-2	-1	0	1	2	3
y_i	3	1	1	1	-1	-3

, b)

x_i	-3	1	3	4	5
y_i	2	2	0	-1	-2

,

c)

x_i	-3	-1	0	2	3	5	6
y_i	6	6	3	2	0	1	-1

, d)

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	1	2	4	4	4	6	6

.

2. Aproximujte soubor bodů exponenciální funkcí $y = b\cdot a^x$ metodou nejmenších čtverců:

a)

x_i	0	1	2	3	4
y_i	20	12	5	3	1

, b)

x_i	-1	0	1	3	4	6
y_i	1	1	4	15	40	96

,

c)

x_i	-1	0	1	2	3
y_i	2	3	8	25	60

, d)

x_i	0	1	2	3	4
y_i	15	7	0	-2	-4

.

Výsledky úloh 10.2.3.

1. a) $y = -\dfrac{36}{35}x + \dfrac{89}{105}$, b) $y = -0{,}5x + 1{,}2$, c) $y = -0{,}79x + 3{,}78$, d) $y = 0{,}82x + 0{,}57$.

2. a) $y = 22{,}4952\cdot 0{,}4782^x$, b) $y = 1{,}6639\cdot 2{,}044^x$, c) $y = 3{,}84\;.2{,}44^x$,
d) $y + 5 = 22{,}51\cdot 0{,}48^x \Rightarrow y = 22{,}51\cdot 0{,}48^x - 5$.

Shrnutí kapitoly

!*!**Algebraické rovnice a jejich řešení graficky a numericky.**
Rovnice tvaru $P_n(x) = 0$ nazýváme algebraické rovnice. Neumíme-li kořeny rovnice určit přesně, používáme k jejich přibližnému určení grafickou nebo numerickou metodu. Základem numerického řešení je separace kořenů a jejich aproximace např. metodou půlení intervalu.
!*!**Aproximace funkce pomocí Taylorova polynomu.**
Aproximovat funkci $y = f(x)$ v bodě x_0 Taylorovým polynomem znamená najít takový polynom $T_n(x)$, který funkci $f(x)$ co nejlépe napodobuje v okolí bodu x_0.
Aproximace funkce pomocí Lagrangeova interpolačního polynomu.
Aproximovat body $[x_i, f(x_i)]$ Lagrangeovým interpolačním polynomem znamená najít takový polynom $L_n(x)$, který danými body prochází.
Aproximace funkce metodou nejmenších čtverců.
Aproximovat body $[x_i, y_i]$ funkcí $\varphi(x)$ metodou nejmenších čtverců znamená najít takové koeficienty této funkce, aby součet čtverců vzdáleností bodů $[x_i, y_i]$ od bodů křivky $[x_i, \varphi(x_i)]$ byl co nejmenší. Za funkci $\varphi(x)$ nejčastěji volíme přímku, parabolu nebo exponenciální funkci podle toho, na jakou závislost bodů usuzujeme.

Klíčové pojmy

- algebraická rovnice,
- grafické a numerické řešení algebraické rovnice,
- Taylorův polynom,
- Lagrangeův interpolační polynom,
- metoda nejmenších čtverců.

Samostatný test

A. Teoretická část

1. Rozhodněte o pravdivosti následujících tvrzení :

a) Rovnice $3x^7 + 4x^3 - x = 0$ je algebraickou rovnicí 3. stupně.
b) Každá algebraická rovnice lichého stupně má aspoň jeden reálný kořen.
c) Rovnice $P_n(x) = 0$ má vždy sudý počet kořenů, nebo žádný.
d) Rovnice $x^3 - 1 = 0$ má tři komplexní kořeny.

e) Algebraická rovnice $9x^6 - 4x^4 + x^2 + 1 = 0$ se nazývá normovaná.

f) Separací kořenů rovnice rozumíme určení intervalu, ve kterém leží všechny kořeny dané rovnice.

g) Taylorův polynom používáme pro určení kořenů dané rovnice.

h) Pomocí Hornerova schématu lze určit pouze přirozené kořeny algebraické rovnice.

2. Určení intervalů, ve kterých leží právě jeden kořen dané rovnice, nazýváme :
a) separace kořenů, b) aproximace kořenů, c) derivace kořenů.

3. Aproximujeme-li funkci tak, že najdeme polynom, který prochází danými body, nazveme tuto metodu aproximací funkce : a) pomocí Taylorova polynomu, b) pomocí Lagrangeova interpolačního polynomu, c) metodou nejmenších čtverců.

4. Je-li kořenem jisté algebraické rovnice komplexní číslo $x = 1 - \sqrt{6}i$, pak tato rovnice má také kořen : a) $x = -1 + \sqrt{6}i$, b) $x = 1 + \sqrt{6}i$, c) $x = -1 - \sqrt{6}i$.

B. Praktická část

1. Pomocí Hornerova schématu určete všechny kořeny algebraické rovnice:

a) $P(x) = x^4 - x^3 - 6x^2 + 4x + 8$,

b) $P(x) = x^5 - 9x^4 + 27x^3 - 47x^2 + 72x - 60$.

2. Určete reálné kořeny binomické rovnice : a) $x^3 + 8 = 0$, b) $x^6 - 1 = 0$.

3. Řešte algebraické rovnice s přesností alespoň 0,05 :

a) $x^3 + 2x^2 - 4 = 0$ s přesností 0,06,

b) $x^3 - 6x + 3 = 0$ s přesností 0,05,

c) $x^3 - 2x^2 - 8 = 0$ s přesností 0,08.

4. Pro danou funkci napište Taylorův polynom 3. stupně v daném bodě :

a) $y = \operatorname{cotg} x$, $x_0 = 0$ ($x_0 = 1$),

b) $y = \ln(1 - 2x)$, $x_0 = 0$, ($x_0 = -1$),

c) $f : y = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$, $x_0 = 0$.

5. Napište Taylorův polynom *n*-tého stupně funkce v daném bodě:

a) $f : y = \ln x$ v bodě $x_0 = 1$,

b) $f : y = (1 + x) \cdot e^x$ v bodě $x_0 = 0$,

c) $f : y = \dfrac{x}{2 - x}$ v bodě $x_0 = 0$.

6. Určete $\cos 84^\circ$ s chybou menší než 10^{-5}.

Použijte přitom Taylorův polynom kde $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ a počítejte pro $x = \dfrac{84\pi}{180}$.

7. Napište Lagrangeův interpolační polynom pro funkci danou tabulkou:

a)

x_i	-2	1	4
$f(x_i)$	2	-3	1

, b)

x_i	-2	3	0	1
$f(x_i)$	4	-2	1	0

.

8. S jakou přesností lze určit pomocí Lagrangeova interpolačního polynomu hodnotu výrazu $\ln(100{,}5)$, známe-li hodnoty $\ln(100)$, $\ln(101)$, $\ln(102)$, $\ln(103)$?

9. Vyrovnejte soubor přímkou metodou nejmenších čtverců a načrtněte graf:

a)

x_i	-3	-2	0	1	3
y_i	-7	-3	-1	1	4

, b)

x_i	1	2	3	4	5
y_i	2	3	$2{,}5$	2	$1{,}5$

.

10. Aproximujte soubor bodů exponenciální funkcí $y = b \cdot a^x$ metodou nejmenších čtverců:

a)

x_i	1	2	4	6	8	10
y_i	2	3	8	19	50	212

, b)

x_i	-1	0	1	2
y_i	$-1{,}6$	1	18	158

.